Краткие сообщения ОИЯИ №10-85 JINR Rapid Communications No.10-85
УДК 530:182

"СПЕКТР" ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ МАССИВНОЙ МОДЕЛИ КОМПЛЕКСНОГО ПОЛЯ ТИПА БОРНА - ИНФЕЛЬДА

В.Е.Гришин, В.К.Федянин

В модели типа Борна - Инфельда с $U(1)$ -абелевой глобальной калибровочной группой, используя ряд подстановок, позволивших найти интегрирующий множитель, приходим к задаче поиска частных решений на алгебраической поверхности $G^2 - P_4(\phi, \omega^2 | E) = 0$ рода $g = 1$ /топология тора/. "Спектр" этих решений, полученный методом фазовой плоскости /МФП/, анализируется в зависимости от параметров $D(\omega^2, E)$ исходного интеграла.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

"Spectrum" of Special Solutions for a Field Massive Model of Born-Infeld Type Complex

V.E.Grishin, V.K.Fedyanin

Special solutions $U(1)$of the Born-Infeld model with Abelian gauge global group have been found using some substitutions and integrating factor. The problem is reduced to finding its special solutions on the algebraic surface $G^2 - P_4(\phi, \omega^2|E) = 0$ of the type $g = 1$ (topology of torus). The dependence of these solutions on $D(\omega^2, E)$ parameters of the initial integral is analysed by the method of phase plane (MPP).

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Введение

В существующих полевых теориях появление расходимостей тесно связано с поведением некоторых типов решений соответствующего уравнения, которые исходят из особой пространственно-временной точки, подобно функциям Швингера.Так, в частности, в полевых уравнениях теории сильных взаимодействий имеется наличие сингулярностей на световом конусе. Данным сингулярностям должна отвечать вполне определенная специфика решений вблизи светового конуса. Еще на заре появления теории элементарных частиц Борн и Инфельд предложили нелинейную модификацию уравнений Максвелла.

В последние годы интерес к нелинейным дифференциальным уравнениям резко возрос. К описанию свойств частиц в теории конденсированного состояния классической и квантовой теории поля привлекаются решения как полностью интегрируемых уравнений /sine-Gordon, НУШ, КдВ и др./, так и других нелинейных уравнений /например, ϕ^4/. Отметим, что нелинейные уравнения обладают, как правило, богатым спектром решений, которые можно с полным основанием привлекать для описания физических свойств частицеподобных объектов /в уравнении sine-Gordon - это "фононы", кинки и антикинки, бионы/. Нам представляется, что актуальным является развитие общих методов исследования "спектра" решений нелинейных уравнений.

В данной работе будут изложены основные результаты исследования спектра решений модифицированной модели класса Борна - Инфельда для комплексного скалярного поля, обладающей $U(1)$-глобальной калибровочной группой. Лагранжиан этой системы имеет вид

$$L[H,G] = \sqrt{1 + H^2 - m^2 \cdot G^2}, \qquad /1/$$

где $H^2(\phi_\mu) = g_{\mu\nu} \cdot \phi_\mu \cdot \phi^*_\nu$, $G^2(\phi) = \phi \cdot \phi^*$- скаляры. Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ здесь определен в произвольном $n+1$-мерном псевдоевклидовом пространстве: $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, $Sp\, g_{\mu\nu} = -(n-1)$, $\mu, \nu = 0,1,2...n$. При наличии массы $m^2 \neq 0$ имеем для полной дивергенции соотношение

$$\nabla_\mu \cdot F_\mu = m^2 \cdot j, \quad F_\mu = g_{\mu\nu} \frac{\phi_\nu}{\sqrt{1 + H^2 - m^2 G^2}},$$
$$j = \frac{\phi}{\sqrt{1 + H^2 - m^2 G^2}}. \qquad /2/$$

Уравнение движения /2/ представляется в развернутом виде:

$$2 \cdot \phi_{\mu\mu} \cdot (1 + H^2 - m^2 G^2) - \phi_\mu \cdot \nabla_\mu \cdot f + m^2 (\phi^* \cdot \phi_\mu^2 + \phi |\phi_\mu^2|) +$$
$$+ 2m^2 \cdot \phi \cdot (1 + H^2 - m^2 \cdot G^2) = 0. \qquad /3/$$

В /3/ введены обозначения $\nabla_\mu \equiv \partial_\mu$, $\partial_\mu \phi \equiv \phi_\mu$, $f = \phi_\alpha \cdot g_{\alpha\beta} \cdot \phi^*_\beta$ - скаляр. При $\phi = \phi^* /\mu, \nu = 0,1/$ мы приходим к уравнению Борна - Инфельда для действительного скалярного поля:

$$\phi_{tt} (1 - \phi_x^2 - m^2 \cdot \phi^2) - \phi_{xx} (1 + \phi_t^2 - m^2 \phi^2) +$$
$$+ 2 \cdot \phi_{xt} \cdot \phi_x \cdot \phi_t + 2m^2 \phi \cdot (\phi_t^2 - \phi_x^2) + m^2 \cdot \phi (1 - m^2 \cdot \phi^2) = 0. \quad /4/$$

Случай $m^2 = 0$ - безмассовое уравнений Борна - Инфельда, был подробно исследован в работах [3-8]. В [4,6] была доказана полная интегрируемость безмассового варианта уравнения /4/. Кроме того, оказывается, что уравнение /4/ может менять свой тип /нарушение гиперболичности/ в некоторой пространственно-временной точке. В этом случае возможна прямая связь появления на характеристиках ударных волн в точках, где уравнение переходит в уравнение эллиптического типа.

В работе [6] была установлена идентичность безмассовой версии /4/ и уравнения экстремальных поверхностей $Z = \phi(x, t)$ /мыльные пленки/ в псевдоевклидовом пространстве с метрикой

$$dS^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu \cdot dx_\nu = dt^2 - dx^2 - dz^2.$$

Кроме этого, в [7,8] была доказана эквивалентность уравнений Эйнштейна ($S_a = 0$) нелинейным уравнениям электродинамики Борна - Инфельда. Отметим в заключение этого раздела, что модель типа Борна - Инфельда с $m^2 \neq 0$ была мало изучена ввиду отсутствия достаточно эффективных методов исследования для подобных существенно-нелинейных систем.

1. Анализ уравнения для массивной модели Борна - Инфельда с U(1)-симметрией

В данной заметке, излагая результат исследования "спектра" частных решений /3,4/, мы, как и в [9,10], воспользуемся методом фазовой плоскости. И в данном случае весьма удобна инвариантная подстановка: $\phi(\theta, \psi) = \phi(\theta)\cdot e^{i\psi}$, где

$$\theta = k_\mu \cdot x_\mu, \quad \psi = p_\mu \cdot x_\mu \qquad /5/$$

- обобщенная координата и фаза плоской бегущей волны в $n+1$-мерном пространстве.

Будем предполагать, что векторы k_μ, p_μ находятся на взаимно ортогональных гиперболоидах с условием нормировки $k_\mu^2 = -\alpha^2 < 0$, $p_\mu^2 = \beta^2 > 0$, $k_\mu \cdot p_\mu = 0$. Если использовать подстановку /5/, то уравнение движения /3/ принимает вид

$$\phi_{\theta\theta} \cdot (1 - \omega^2 \cdot \phi^2) + 2 \cdot \omega^2 \cdot \phi_\theta^2 \cdot \phi - \omega^2 \cdot \phi\,(1 - \omega^2\phi^2) = 0. \qquad /6/$$

/Здесь мы перешли к переменной $\theta' = \theta/\sqrt{-k_\mu^2}$; штрих далее опущен/. Подстановкой $\frac{d\phi}{d\theta} = y(\phi)$, $\frac{d^2\phi}{d\theta^2} = y \cdot \frac{dy}{d\phi}$ уравнение /6/ можно привести к дифференциальной форме Пфаффа:

$$\Omega = P(y,\phi)\cdot dy + Q(y,\phi)\cdot d\phi = 0\,. \qquad /7/$$

Для того чтобы форма Ω являлась полным дифференциалом, необходимо использовать интегрирующий множитель:

$$\mu(\phi) = \exp\int\left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial \phi}\right)/P\right\}d\phi =$$

$$= \exp\left(6\cdot\omega^2\cdot\int\frac{\phi\cdot d\phi}{1-\omega^2\cdot\phi^2}\right) = e^{-3\ln(1-\omega^2\cdot\phi^2)}, \qquad /8/$$

$$\mu(\phi) = \frac{1}{(1-\omega^2\cdot\phi^2)^3}\,.$$

В итоге уравнение /7/ в полных дифференциалах представляется в следующем виде:

$$d\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial\Omega}{\partial\phi}\cdot d\phi = 0,$$

где $\frac{\partial\Omega}{\partial y} = P(y,\phi)\cdot\mu(\phi)$, $\frac{\partial\Omega}{\partial\phi} = Q(y,\phi)\cdot\mu(\phi)$. Используя /8/, имеем

$$\Omega(y,\phi) = \mu(\phi)\cdot\int P\cdot dy + Z(\phi) = \frac{y^2}{2(1-\omega^2\phi^2)^2} + Z(\phi),$$

или

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\phi} = \frac{2\cdot\omega^2\cdot y^2\cdot\phi}{(1-\omega^2\cdot\phi^2)^2} + \frac{\partial Z}{\partial\phi} = Q\cdot\mu(\phi).$$

Из последнего соотношения следует: $\frac{\partial Z}{\partial\phi} = -\frac{\omega^2\cdot\phi}{(1-\omega^2\cdot\phi^2)^2}$. В окончательной форме функции $Z(\phi)$, $\Omega(y,\phi)$ представляются в виде

$$Z(\phi) = -\omega^2\int\frac{d\phi}{(1-\omega^2\cdot\phi^2)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-\omega^2\phi^2)} + C,$$

$$\Omega(y,\phi) = \frac{y^2}{2(1-\omega^2\phi^2)^2} - \frac{1}{2\cdot(1-\omega^2\phi^2)} + C.$$

Отсюда следует, что $d\Omega$ - полный дифференциал, то есть

$$d\left[\frac{y^2}{2\cdot(1-\omega^2\cdot\phi^2)^2} - \frac{1}{2\cdot(1-\omega^2\cdot\phi^2)} + C\right] = 0.$$

С учетом того, что $y = \frac{d\phi}{d\theta}$, дифференциальное уравнение /6/ принимает окончательный вид:

$$\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2 = (1-\omega^2\cdot\phi^2)\cdot[1+C(1-\omega^2\cdot\phi^2)]. \qquad /9/$$

Квадратура /9/ дается эллиптическим интегралом 1-го рода:

$$\theta(\phi) = \int\frac{d\phi}{G_4(\phi)},\quad G_4^2 = E - U(\phi, E\,|\,\omega^2),$$
$$U(\phi, E\,|\,\omega^2) = \omega^2(2E-1)\cdot\phi^2 - \omega^4(E-1)\cdot\phi^4,\quad E = C+1. \qquad /10/$$

Сразу же отметим интересную особенность этого результата: эффективный потенциал $U(\phi, E|\omega^2)$ зависит от "энергии" E. Это усложняет исследование спектра частных решений вида /5/ /установление связи $\phi=\phi(\theta)$ при обращении интеграла в /10//, но делает его более "богатым" /см. ниже/. Эллиптического типа абелев интеграл в /10/ аналитичен всюду за исключением точек ветвления $/a_1, a_2, a_3, a_4/$. Точки ветвления для /10/ являются корнями алгебраического уравнения $G_4^2(\phi, E\,|\,\omega^2)=0$. Известно, что кривая

$$G_4^2 - [E - U(\phi)] = 0, \qquad /11/$$

рода $g = 1$ $(g = \frac{n-2}{2}=1,\ n=4)$, допускает униформизацию на классе эллиптических функций вида

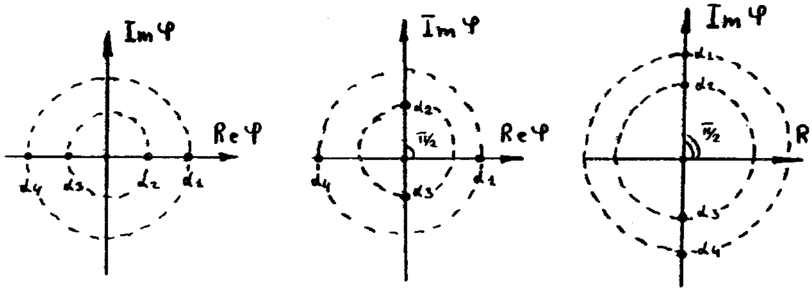
$$\phi = z_i[\theta],\quad G = \frac{dz_i}{d\theta}, \qquad /12/$$

где $z_i[\theta]$ - некоторая эллиптическая функция. Согласно /10/, /12/, эллиптические функции будут удовлетворять исходному дифференциальному уравнению /9/. Эллиптические функции $z_i[\theta]$ будут результатом обращения абелева интеграла /10/. Конкретный вид эллиптической функции $\phi=z_i[\theta]$ будет существенно зависеть от типа корней $/a_1, a_2, a_3, a_4/$ уравнения $G_4^2(\phi)=0$. Классификация корней на комплексной плоскости представлена на рис.1. Используя стандартное обращение эллиптического интеграла 1-го рода, изложенное в [9], можно для интеграла /10/ получить спектр решений в терминах эллиптических функций Якоби. Представляется естественным разделить случаи: $\{I.\ \omega^2 > 0$ и $II.\ \omega^2 < 0\}$ $\forall E, (-\infty < E < \infty)$.

I. $\omega^2 > 0$. Опишем здесь кратко результаты анализа /удобно ввести переменные $y=\omega\cdot\phi$, $x=\omega\cdot\theta$ /:

1/ при $E<0$ мы получаем нелинейные волны конечной амплитуды

$$y = dn[\sqrt{|E-1|}\cdot x,\ k],\qquad k^2 = 1/\sqrt{|E-1|}\ ; \qquad /13/$$



а/ б/ в/

Рис.1. а/ – все корни действительные; б/ – корни действительные и комплексные; в/ – все корни комплексные.

2/ для $1 > E > 0$ получаем "коноидальные" волны

$$y = cn[x, k_1], \ k_1^2 = |E - 1|; \qquad /14/$$

3/ при $k^2 = k_1^2 = 1$ $(E = 0)$ получаем вырожденные случаи /13/, /14/ в виде солитона

$$y = dn(x, 1) = cn(x, 1) = \mathrm{sech}\, x; \qquad /15/$$

4/ при $E > 1$ /10/ приводит к периодическим нелинейным "sn" -волнам:

а/ $y = sn[\sqrt{E} \cdot x, k]$ /16/

для $|y| < 1$, $y = \omega \cdot \phi$, $x = \omega \cdot \theta$, $k^2 = 1 - \frac{1}{E}$, $\omega^2 = m^2 - \beta^2 > 0$;

б/ а также к сингулярным решениям для гиперболических орбит на фазовой плоскости

$y = dc[\sqrt{E} \cdot x, k]$ /17/

при $\infty > y > y_1$, $\quad y_1 = (1 + \frac{1}{E - 1})$, $k^2 = 1 - \frac{1}{E}$.

При $k^2 \to 0$ $(E \to 1)$ из /16/ получаются малые линейные колебания $y = \sin x$. Решение /17/ в предельном случае $k^2 = (1 - 1/E) \to$ $\to (E \to \infty)$ переходит в решение типа доменной стенки: $y \sim th(x \cdot \sqrt{E})|_{E \to \infty}$ с шириной переходной зоны $\Delta \sim \frac{1}{\sqrt{E}}|_{E \to \infty} \sim 0$, т.е, практически имеет вид "ступеньки" (⌐).

II. $\omega^2 < 0$ $(\omega = i\omega_1)$. Как показывает анализ неравенства $E - U_4(\phi, E|\omega_1^2) > 0$, где

$$U_4(\phi, E|\omega_1^2) = -\omega_1^2(2E-1)\cdot\phi^2 - \omega_1^2\cdot(E-1)\cdot\phi^4,$$

решения существуют в двух областях изменения переменной: 1/ $1 > E > 0$, 2/ $E > 1$. При $1 > E > 0$ имеем решение в виде коноидальных волн:

$$y = \frac{(1-|E-1|)}{|E-1|}\cdot cn[x, k], \qquad k^2 = 1-|E-1|,$$
$$\omega_1^2 = \beta^2 - m^2 > 0. \qquad /18/$$

2/ Для $E > 1$ получаем сингулярные решения:

$$y = \sqrt{\frac{E-1}{E}}\cdot tn^{-1}[\sqrt{E}\cdot x, k], \quad k^2 = \frac{1}{E}. \qquad /19/$$

Для /18/ в пределе $k^2 \to 1$ $(E\to 1)$получаем сингулярный солитон:

$$y = \left(\frac{1}{E-1+\epsilon} - 1\right)\Big|_{E=1,\epsilon\to 0}\cdot ch^{-1}(x), \qquad y = \omega_1\phi,\ x = \omega_1\cdot\theta,$$
$$\omega_1^2 = \beta^2 - m^2 > 0. \qquad /20/$$

Как показывают формулы /18/ и /19/, при $\omega^2 = m^2 - \beta^2 < 0$ или $\omega_1^2 = \beta^2 - m^2 > 0$, где $\omega = i\omega_1$, данные решения можно выразить в терминах эллиптических функций Якоби, даже в безмассовой теории Борна - Инфельда $m^2 = 0$ /существенным моментом является требование, чтобы скалярное поле было комплексным/. Так, например, для /19/ с учетом /5/ "полное" решение при $m^2 = 0$ имеет вид

$$\phi(\theta,\psi) = \frac{1}{(\beta^2)^{1/2}}\sqrt{\frac{E-1}{E}}\ tn^{-1}(\sqrt{E\cdot\beta^2}\cdot\theta,\ k)\cdot e^{i\psi}.$$

Полученный "спектр" частных решений для параметров $(E|\omega^2)$ представлен на рис.2.

Выражаем признательность Б.М.Барбашову и Б.А.Дубровину за обсуждение результатов и ценные замечания.

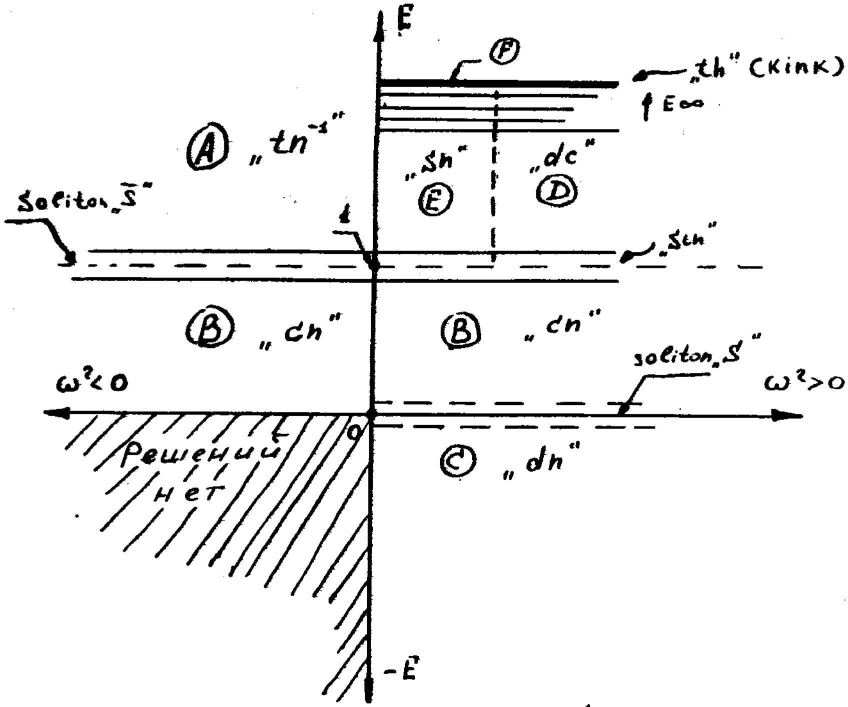


Рис.2. A – сингулярные решения "tn^{-1}"; B – коноидальные волны "cn"; C – "dn"-волны; D – сингулярные "dc"-волны; E – "sn"-волны; F – кинки в пределе $E \to \infty$; "S̄" – сингулярный солитон; "S" – обычный солитон; "sin" – гармонические колебания.

Литература

1. Born M., Infeld L. Proc.Roy.Sov., 1934, vol.A144, p.425.
2. Гришин В.Е., Федянин В.К.В кн.: Сборник аннотаций III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. ОИЯИ, Д17-84-407, Дубна, 1984, с.49.
3. Барбашов Б.М., Черников Н.А. ЖЭТФ, 1966, т.50, с.1296.
4. Барбашов Б.М., Черников Н.А. ОИЯИ, Р2-7857, Дубна, 1974.
5. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-80-419, Дубна, 1980.
6. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. В кн.: Материалы IV Международного совещания по нелокальным теориям поля. Алушта, 1976. ОИЯИ, Д2-9788, Дубна, 1976, с.243.

7. Черников Н.А. ОИЯИ, Р2-9714, Дубна, 1976.
8. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-83-781, Дубна, 1983.
9. Гришин В.Е., Федянин В.К. ТМФ, 1983, т.54, № 3, с.469.
10. Гришин В.Е., Федянин В.К. ТМФ, 1984, т.59, № 3, с.440.
11. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. "Наука", М., 1968.

Рукопись поступила 3 июня 1985 года.